CAMEF 5-8

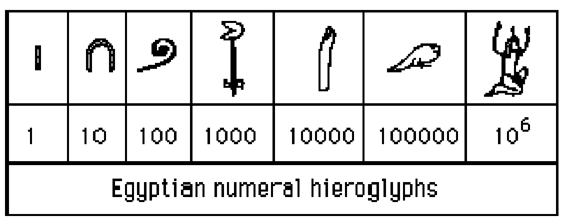
Les fractions et les nombres décimaux

1. Historique : Les fractions

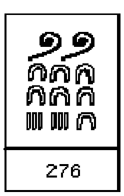
Les fractions, telles qu'on les utilise aujourd'hui n'existaient pas en Europe avant le 17e siècle. En fait, les fractions n'étaient pas considérées comme des nombres. C'était tout simplement une façon de comparer des nombres entiers entre eux.

Le mot « fraction » vient du latin « ***fractio*** » qui signifie briser. Pour comprendre comment les fractions ont été développées dans la forme qu'on leur connaît, il faut reculer dans le temps pour découvrir comment étaient les premiers systèmes numériques.

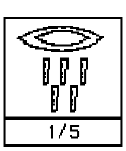
Depuis au moins 1800 ans av. J.-C., les Égyptiens écrivaient des fractions. Leur système numérique était à la base 10. Ils avaient différents symboles pour représenter 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, et 1 000000. Leurs symboles étaient des dessins appelés hiéroglyphes.



Voici, en exemple, comment les nombres étaient représentés :



Les Égyptiens écrivaient leurs fractions en utilisant ce qu'ils appelaient des fractions unitaires. Une fraction unitaire a le chiffre 1 au numérateur. Ils plaçaient l'image d'une bouche, ce qui signifiait une partie; en dessous, il y avait un autre nombre qui représentait une fraction de l'unité. Voici un exemple de 1/5.



Les fractions et

les nombres décimaux

Ils pouvaient utiliser une somme de fractions unitaires pour représenter une fraction non unitaire, mais dans cette addition, ils ne devaient pas utiliser la même fraction unitaire plus d'une fois.

Par exemple, ils représentaient ¾ comme ceci : $^3/_4 = {^1/_2} + {^1/_4}$ et non comme ¼ + ¼ + ¼

Ce qui est très désavantageux de la représentation des fractions du système égyptien, c'est la difficulté de faire des calculs. Donc, pour essayer de dépasser cela, les Égyptiens ont fait plusieurs tables de représentation de fractions complexes et ils pouvaient regarder la réponse à un problème sans faire de calculs.

Dans l'ancienne Rome, les fractions étaient seulement utilisées en écrivant des mots qui décrivaient une partie du tout. Ils étaient basés sur le poids qu'ils nommaient « AS ». Un « AS » était composé de 12 « uncial », alors les fractions étaient basées sur les douzièmes.

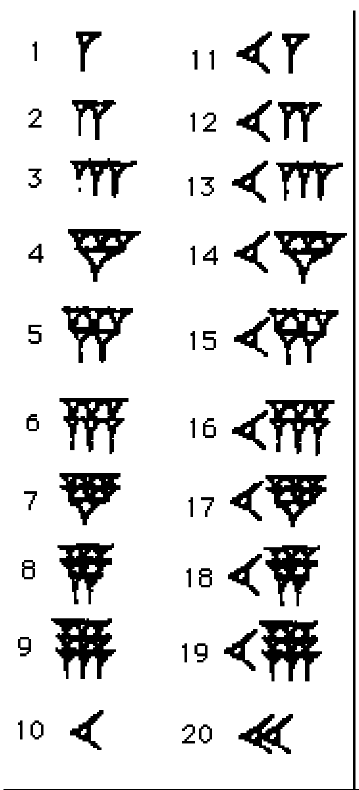
$\frac{1}{12}$ se nommait **deunx**

$\frac{6}{12}$ se nommait **semis**

$\frac{1}{144}$ se nommait **scripulum**

Comme chez les Égyptiens, l'utilisation de mots au lieu de chiffres rendait les calculs difficiles.

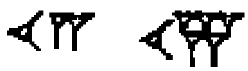
Les Babyloniens ont été les premiers à trouver une façon de représenter les fractions plus efficacement. En fait, ceci avait été fait avant la méthode des Romains, mais il n'y avait pas de communication entre les deux civilisations. Les Babyloniens vivaient dans un endroit qu'on nomme aujourd'hui l'Iraq. Leur système numérique était organisé autour du nombre 60; alors



c'était à la base 60. En d'autres mots, ils groupaient les nombres en soixantaines tandis que nous groupons en dizaines. Si vous y pensez bien, on utilise encore la base 60 pour l'heure et les angles. Les Babyloniens groupaient également en dizaines. Ils avaient seulement 2 symboles : un pour les unités et un pour les dizaines.

Les Babyloniens ont étendu leur système de nombres pour inclure les fractions en soixantièmes, comme nous le faisons pour les dixièmes, les centièmes, etc. Ils n'avaient pas de zéro ni de virgule décimale. Cela créait un peu de confusion en lisant les nombres, puisqu'ils pouvaient être interprétés de différentes façons.

Voici un exemple :



Avec ces dessins, on peut lire les nombres 12 et 15. On peut faire erreur, puisque cela pourrait avoir plusieurs sens.

x 60	***Unités***	***Soixantaines***	***Nombre***
	12	15	$12 + \frac{15}{60} = 12\ \frac{15}{60}$
12	15		720 + 15

Même si la méthode des Babyloniens était plus sophistiquée, il y avait des inconvénients. Vers l'an 311 av. J.-C., ils ont conçu un zéro, ce qui a facilité les choses, mais sans la virgule décimale, c'était quand même difficile de distinguer les fractions des nombres entiers.

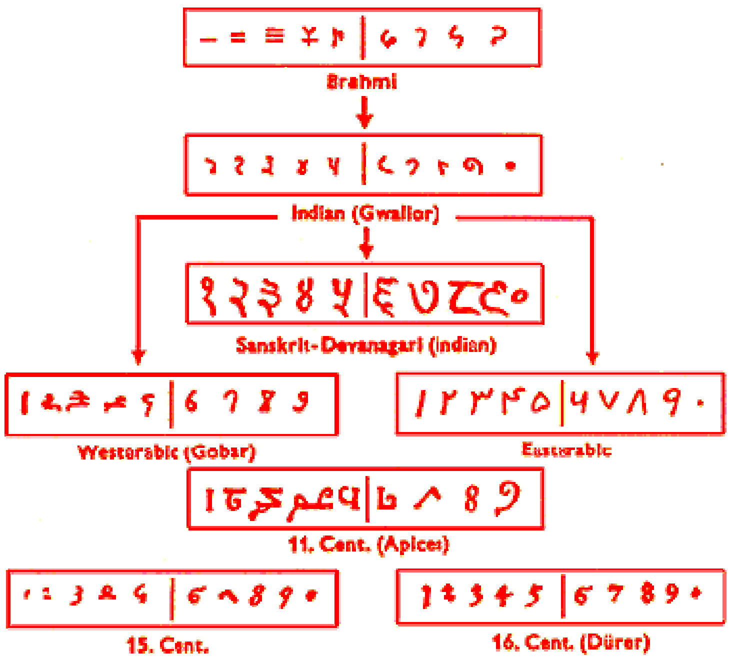
Le format que nous connaissons vient directement du travail de la civilisation indienne. Le succès de sa façon d'écrire les fractions origine de son système de nombres qui a trois idées principales.

- Chaque figure a un symbole qui n'est pas comme la valeur qu'elle représente.
- La valeur de la figure dépend de la position qu'elle occupe dans le nombre entier.
- Un zéro est nécessaire pour indiquer qu'il n'y a rien et pour occuper les places d'unités manquantes.

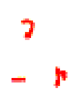
Les fractions et les nombres décimaux

Vers l'an 500 apr. J.-C., les Indiens avaient développé un système d'écriture nommée brahmi qui avait 9 symboles et un zéro. Même si cela avait été conçu bien avant d'autres façons de compter, ce n'est que par les échanges avec les Arabes que les chiffres des Indiens se sont répandus en Arabie où les Arabes ont utilisé la même forme.

Voici comment les symboles brahmi sont devenus les nombres que nous connaissons aujourd'hui.



En Inde, les fractions étaient écrites de façon similaire à celle que nous utilisons présentement avec un chiffre au-dessus d'un autre (numérateur au-dessus du dénominateur), sauf qu'il n'y avait pas de ligne pour les séparer.

 = 7
15

Ce sont les Arabes qui y ont ajouté la ligne pour séparer le numérateur et le dénominateur. Parfois elle était horizontale, parfois, en pente.

Voilà donc l'origine de la fraction qu'on connaît aujourd'hui.
http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2515&part=index&refpage=monthindex.php

2. Apprentissage: procédures et obstacles

Fractions : représentations et opérations

Dès leur arrivée à l'école, plusieurs enfants utilisent déjà les fractions dites simples : demi, moitié. Durant les premières années à l'école, les fractions, comme d'autres concepts, peuvent être apprises par les élèves sans la nécessité de suivre un enseignement formel, mais avec l'intérêt et l'excitation des élèves à partir d'expériences concrètes et de manipulations (pliage, découpage, etc.).

Plus tard dans leur scolarité, en s'appuyant sur différentes expériences de comptage dès le jeune âge, les enfants développent des concepts d'unités et d'unités composés. Cela leur permettra de mieux comprendre le concept d'unité en lien avec la valeur de position, la mesure, les fractions et les proportions. Les recherches démontrent que même si les fractions sont une partie importante du curriculum au primaire, le processus d'acquisition n'est pas aussi complet comparativement aux nombres entiers. Cela est dû en partie à la complexité des nombres rationnels. Comprendre les nombres rationnels (dont l'écriture fractionnaire fait partie) nécessite une coordination conceptuelle des connaissances mathématiques de différents domaines.

La recherche de nouvelles méthodes d'enseignement nous amène à réviser nos stratégies d'intervention par rapport aux procédures conventionnelles. Autrefois, les enfants pouvaient parfois comparer 1/6 et 1/8, par exemple, et croire que 1/8 était plus gros puisque 8 est plus grand que 6.

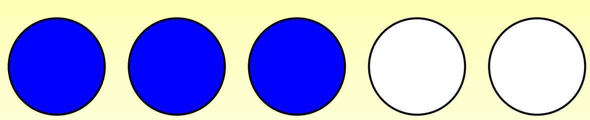
Aujourd'hui, l'enseignant peut proposer aux élèves de résoudre des problèmes de comparaison des fractions qui sont significatifs pour eux en leur permettant d'utiliser leurs propres procédures informelles tels que manipulation et/ou dessin.

Par exemple, lors d’une formation professionnelle pour les enseignants du primaire, un problème exigeait d’effectuer des divisions de fractions. Les participants devaient calculer chaque expression, écrire des erreurs communes que des élèves de 7^{e} année pourraient faire lors des calculs de fractions et décrire la source de ces erreurs. L’une des expressions était ¼ ÷ ½. Les participants ont tous bien répondu au problème. La majorité a argumenté qu’une erreur possible serait de dire ¼ ÷ ½ = 2. Cette erreur serait possible s’il y avait un bogue dans l’algorithme (¼ ÷ ½ = 4/1 ÷ ½ = 2). L’erreur peut également être causée par une conception erronée de l’élève voulant que le dividende soit toujours plus grand que le diviseur (½ ÷ ¼ = 2) ou causée par l’application de règles inadéquates (en pensant, par exemple, que la division est commutative, alors ¼ ÷ ½ = ½ ÷ ¼). Il faut donc s’occuper de ces sources possibles d’erreurs en organisant un débat qui permet aux élèves de se rendre à l’évidence d’incohérences et de sentir le besoin et la capacité de développer leurs propres méthodes adéquates.

Les algorithmes pour multiplier les fractions sont très difficiles à comprendre pour les enfants puisqu’ils n’y voient pas de sens. Ils essaient premièrement de comprendre ce que veulent dire les fractions. Ils ont toujours appris la multiplication comme étant une addition répétée et ils essaient de trouver l’addition répétée pour multiplier les fractions. Finalement, comme ils traitent les nombres des numérateurs et des dénominateurs comme des chiffres pour performer l’algorithme, ils oublient la quantité qu’ils multiplient vraiment et font des erreurs en calculant les parties de l’écriture fractionnaire séparément.

Il y a différentes façons de voir une fraction.

Par exemple, pour certaines personnes 3/5 représente trois de cinq, tandis que pour d’autres personnes, cette fraction représente 3 fois un cinquième. Par exemple, la façon dont un élève comprend une image comme la suivante en relation avec la fraction 3/5 peut avoir des conséquences importantes.



Quand les élèves pensent à une fraction comme étant « tant de tant », cela peut créer de la confusion lorsqu’ils voient une fraction comme 6/5. Comment prendre 6 choses de 5?

Travailler les fractions

Certains élèves ont des difficultés quand vient le temps de faire des calculs avec les fractions. Ceci peut venir d'un manque de compréhension de ce qu'est une fraction. Avoir des difficultés pour mettre les fractions au dénominateur commun lorsqu'ils soustraient peut vouloir dire, entre autres choses, qu'ils ne comprennent pas les fractions équivalentes. Ce peut aussi être dû au fait qu'ils ne savent pas comment continuer après avoir mis les fractions au dénominateur commun; peut-être font-ils la même erreur qu'avec la soustraction des nombres entiers. En utilisant des modèles et en faisant beaucoup de manipulations, on pourra les aider à avoir une meilleure compréhension du sens des opérations.

Pour certains élèves, il est nécessaire de jouer avec les fractions afin de comprendre qu'une même fraction peut être représentée de différentes façons. S'ils ont de la difficulté à reconnaître que réduire et simplifier sont la même chose, ils ne sont peut-être pas à l'aise de travailler avec les fractions équivalentes.

Quand Gail, membre du service Teacher2Teacher, a enseigné la multiplication des fractions à ses élèves, elle leur a montré qu'il fallait s'arrêter pour comprendre le sens de la phrase. Par exemple, 5x3 est 5 groupes de 3. Donc, 2x1/3 est 2 groupes de 1/3, ¼ x 8 est un quart d'un groupe de 8, et ½ x 1/3 est la moitié d'un tiers.

Si les élèves n'ont pas de difficulté à déterminer la fraction ordinaire équivalente à un nombre fractionnaire, ils sont à une étape près de pouvoir faire la multiplication avec les nombres fractionnaires. Lorsqu'ils peuvent représenter 1 et 1/5 par 6/5, ils sont tout près de résoudre un problème de multiplication avec des fractions.

Quant à la division, on peut faire un lien avec la division des nombres entiers. Si nous avons 28 divisé par 4, on cherche le nombre de groupes de 4 qui sont dans 28, ou si on fait 4 groupes à partir de 28, combien y aura-t-il d'unités dans chaque groupe? Cela veut donc dire que dans la fraction ¼ divisée par 1/8, le nombre de groupes de 1/8 qu'on peut avoir dans ¼. Quand on divise des fractions par des nombres entiers ou des nombres mixtes, on utilise la même méthode. ¾ divisé par 2 veut dire, si on fait 2 groupes de ¾, combien il y en aurait dans chaque groupe? Le résultat est donc 3/8. ¾ divisé par 1 + ½ est la même chose que dire ¾ divisé par 3/2. Alors les élèves doivent découvrir combien de groupes de 3/2 il y a dans ¾.

Peu importe la méthode qu'on prend pour enseigner les différentes opérations des fractions, il est primordial de laisser du temps aux élèves pour manipuler, modeler et illustrer. La recherche démontre que cela fait faire des généralisations qui leur permettront de travailler plus aisément avec les fractions et les nombres décimaux.

Les fractions et les nombres décimaux

Référence: http://mathforum.org/library/topics/fractions/

Fractions en lien avec les nombres décimaux

Ce qu'il faut premièrement saisir au sujet des fractions et des nombres décimaux équivalents est qu'elles représentent un même nombre. Ce n'est pas tous les élèves par contre qui font ce lien automatiquement. Certains enfants voient la virgule comme un symbole de ponctuation qui sépare 2 nombres entiers. Les élèves croient ainsi qu'une décimale ayant plus de chiffres après la virgule est plus grande. Par exemple, selon eux, 4,63 serait plus grand que 4,7 étant donné que 4,63 a 2 chiffres après la virgule.

Associer les nombres décimaux aux fractions non équivalentes

Les fractions fournissent plus d'information sur la nature relationnelle du nombre que la forme décimale. La fraction 2/5, par exemple, peut représenter un tout divisé en 5 parties égales et 2 de ces parties font la fraction. Tandis que dans le décimale équivalente 0,4, les numérateur et dénominateur sont « cachés ».

Certains élèves peuvent même associer les nombres avant la virgule au numérateur et le nombre après la virgule au dénominateur. Par exemple, 1,4 serait ¼.

Les recherches mettent en évidence des difficultés cognitives communes à la compréhension des nombres décimaux et des fractions.

Par exemple, pour déterminer « la valeur » d'une fraction, le numérateur et le dénominateur doivent être pris en considération simultanément. Si les élèves ne sont pas capables de coordonner ces deux facteurs, il y aura une difficulté importante dans le développement de la compréhension des nombres décimaux et des fractions. Des élèves considèrent le nombre de parties qu'il y a dans la décimale et ne considèrent pas la taille des parties. Ils concluent que 0,621 qui a 621 parties est plus grand que 0,7 qui n'a seulement que 7 parties. Les élèves ne pensent pas à ce que pourrait signifier ces parties. Par ailleurs, certains enfants se concentrent sur la taille des parties et ne considèrent pas le nombre qu'il y a. Par exemple, les enfants peuvent dire que 0,621 est plus petit que 0,7 puisqu'il est composé d'un millième et ils pourraient ajouter que c'est également plus petit que 0,5 puisque celui-ci n'est composé que d'un dixième. Certains croient donc que les nombres décimaux les plus courts sont plus grands en valeur numérique.

CAMEF 5-8

Les fractions et les nombres décimaux

Partition, rapport à l'unité et rapport équivalent

La division, « ***le rapport avec l'unité*** » et le « ***rapport équivalent avec une autre unité*** » sont trois processus cognitifs qui sont requis pour manipuler les fractions, ce qui peut également affecter la compréhension des nombres décimaux. On constate donc que plusieurs difficultés des élèves sont liées au changement dans la nature des unités avec lesquelles ils travaillent. Le processus cognitif compris dans la manipulation des multiples unités est sous-jacent aux difficultés que les élèves ont avec la base de la valeur des positions dans le nombre décimal. Cela peut être une cause des conceptions simplistes, mais erronées.

Référence: http://extranet.edfac.unimelb.edu.au/DSME/decimals/SLIMversion/backinfo/newidea.shtml

Les nombres décimaux

En 1989, 42 % des élèves testés lors d'une étude en France n'avaient pas maîtrisé la division par 100 d'un nombre décimal. Comment peut-on expliquer les difficultés avec les nombres décimaux?

Dans les années 1970, en lien avec une réforme d'autrefois, on a développé une approche de l'étude des nombres à virgules dans différentes bases, en utilisant le processus abstrait du découpage « en entiers », le placement de points sur une droite, etc. Cela n'est pas toujours évident cependant. Si nous prenons l'exemple du placement de points sur une droite, il peut être difficile de faire le lien avec les opérations.

En enseignant les nombres décimaux, l'enseignant démontre parfois que les nombres décimaux ont une partie entière et une partie fractionnaire qui se traitent comme des entiers; cela peut encourir des erreurs chez les élèves.

Certains obstacles sont d'ordre épistémologique. On peut être induit en erreur en croyant que ce qui se produit avec les entiers sera de même avec les nombres décimaux. Par exemple, lorsqu'on multiplie, le nombre n'augmente pas nécessairement, lorsqu'on divise, le nombre ne diminue pas toujours et même si le nombre a plus de chiffres, cela ne veut pas dire que c'est un plus grand nombre.

Il y a eu un grand débat à savoir s'il fallait enseigner les nombres décimaux avant les fractions ou vice versa. La question demeure toujours.

Pour plus d'informations: L'enseignement des nombres décimaux à l'école élémentaire*.*

Les fractions et les nombres décimaux

Enseignement des nombres décimaux à l'école élémentaire **:** Jeanne BOLON, Professeur de mathématiques, IUFM de Versailles
http://www.er.uqam.ca/nobel/k15356/mat1026/Article%20de%20Grand%20N%20n%B0%2052%20%20L'enseignement%20des%20d%E9cimaux%20%E0%20l'%E9cole%20%E9l%E9mentaire.htm

3. Stratégies d'enseignement

Approche socio-constructiviste

Selon le modèle qui a été créé en Saskatchewan, lorsqu'on veut enseigner les fractions, il est préférable de laisser les élèves travailler en coopératif, donc en équipe de 3 ou 4. Dans cette approche, l'enseignant devrait présenter des problèmes que les élèves ne peuvent pas nécessairement résoudre tout de suite. Cela donne l'occasion à l'enseignant d'évaluer les connaissances préalables des élèves et de planifier son enseignement pour les aider à construire de nouvelles connaissances.

Voici les opérations à suivre, selon ce guide.
6e année

- Relation entre les diverses fractions
- Les fractions équivalentes et l'ordre des fractions
- Additions de fractions
- Soustraction de fractions

En 7e année, on répète les mêmes opérations et on ajoute ce qui suit.

- Multiplication des fractions
- Division de fractions

À la fin de chaque module, il y a un moment de réflexion. Des suggestions sont données pour amorcer une discussion ou faire réfléchir les élèves.

- Qu'est-ce qu'une fraction?
- Est-ce que tu t'es déjà servi des fractions? Dans quelle situation?
- Est-ce que les fractions sont faciles ou difficiles? Explique ta réponse.
- Ta camarade a été malade pour quelques jours. Explique-lui comment écrire une fraction en nombre fractionnaire.
- Explique comment tu sais que deux fractions sont équivalentes.
- Etc.

Référence : http://www.sasked.gov.sk.ca/docs/francais/frmath/munitemod/sixset.html

CAMEF 5-8

Les fractions et les nombres décimaux

Utiliser la variété de sens

On doit enseigner les différents concepts de fractions, qui sont les suivants :

- ***la fraction en tant que mesure -*** une fraction qui est un point sur une droite numérique et aussi une fraction qui est une partie d'un tout (les 3/4 du gâteau ont été mangés);
- ***la fraction en tant que quotient -*** la fraction représente une division. Par exemple, 2/3 représente 2 objets partagés entre 3 personnes;
- ***la fraction en tant que rapport -*** la fraction 1/4 représente le rapport de 1 contenant de jus concentré par rapport à 4 contenants d'eau dans la préparation du jus.

Les problèmes que l'enseignant va proposer aux élèves doivent approfondir la compréhension des 3 concepts ci-haut ainsi que les habiletés liées aux fractions. Pour faire cela, l'enseignant peut promouvoir la résolution de problèmes qui se compose de 3 étapes : la compréhension, la planification et l'application, et la réflexion.

Afin que les élèves puissent comprendre l'équivalence de deux fractions, ils doivent d'abord comprendre la notion d'équivalence en général. Ce qui peut permettre de travailler cette notion est de représenter un même nombre entier de différentes façons, soit avec du matériel de base dix, des sous, des mesures, etc.

Il est bon de déterminer les connaissances antérieures des élèves, c'est-à-dire, savoir ce qu'ils ont appris au sujet des fractions en dehors de l'école ainsi que les connaissances acquises à l'école. Cela peut être fait à l'aide de problèmes et de questions à partir desquels les élèves peuvent donner des explications et discuter en grand groupe. Il est important de faire discuter du pourquoi ils ont choisi telle opération pour résoudre tel problème.

Pour faciliter la recherche des dénominateurs communs de deux fractions, l'enseignant peut préparer diverses activités où les élèves ne travailleront qu'avec les multiples.

Il est important de sensibiliser les élèves au fait qu'il y a différentes façons d'exprimer des opérations numériques. Par exemple, on peut dire « 2/3 moins 1/4 », « soustrait 1/4 de 2/3 », « la différence entre 2/3 et 1/4 » pour représenter la même opération. De même que 1/3 de 24, 1/3 x 24, 24 ÷ 3, et 24/3 représentent toutes la même opération.

Pour faciliter davantage la compréhension, il est important de placer les élèves dans des situations réelles, donc qui peuvent avoir rapport à l'argent, aux recettes, aux sports, etc.

CAMEF 5-8

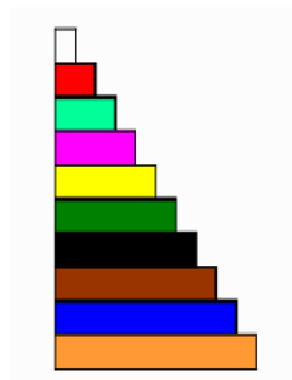
Les fractions et les nombres décimaux

Référence : http://www.sasked.gov.sk.ca/evergreen/francais/frmath/mathinter/g708_frame.html

Utiliser le matériel de manipulation

Investigation des relations fractions/bandes

Pour permettre aux élèves de démontrer leur compréhension des fractions, donc pour activer les connaissances antérieures des élèves, il faut les laisser manipuler des bandes et discuter entre eux de ce qui est semblable et de ce qui est différent parmi les bandes de fractions.



Ce peut être une bonne idée de prendre en note les remarques que font les élèves afin d'avoir des références qui permettront de planifier des plans de leçon.

Il faut amener les élèves à explorer le matériel et déterminer comment les pièces sont liées l'une à l'autre.
En manipulant, il peut arriver que les élèves fassent une pyramide comme la suivante.

L'enseignant peut donner la valeur de 1 à la case blanche et les élèves doivent trouver la valeur des autres couleurs. Par la suite, le rouge prend la valeur de 1; il s'agit de trouver la valeur des autres cases.

Après cet exercice, les élèves devraient pouvoir démontrer leur compréhension de la fraction pouvant être représentée par un symbole linéaire.

Par la suite, les élèves peuvent combiner certaines bandes pour constituer différentes valeurs et continuer ainsi.

Il est ensuite bien que l'enseignant réfléchisse au sujet de la compréhension des élèves, de leurs forces et de leurs faiblesses et, en même temps, voie ce qui a bien fonctionné dans l'activité et ce qui est à éviter.

Ces activités permettent alors de reconnaître et de générer les formes équivalentes des fractions, des nombres décimaux et des pourcentages utilisés fréquemment ainsi que de développer une compréhension des fractions en tant que partie d'un tout, comme une division de nombres entiers.

Les fractions et les nombres décimaux

Référence : http://illuminations.nctm.org/print_lesson.aspx?id=542

Développer une plus grande flexibilité en calcul (division)

La division se fait de différentes façons. Premièrement, il y a le partage qui peut être considéré comme dans le cas suivant : 6 pommes divisées par 3 égale 2 pommes. Ensuite, nous pouvons reconnaître la mesure où 6 pommes divisées par 3 pommes égale 2. On peut également associer cette dernière méthode à la soustraction répétée où on doit soustraire 3 pommes 2 fois de 6 pommes afin d'obtenir 0.

Quand on mesure, on cherche à savoir combien de fois, dans la somme totale, on peut obtenir tel nombre ou telle quantité de choses dans une telle quantité de chose.

Quant aux fractions, diviser n'est plus partager; diviser devient mesurer. C'est alors que 4 divisé par ½ donne 8 et veut dire qu'il y a 8 demies dans 4 entiers. On peut donc dire que 4 mètres divisés par 0,5 mètre égale 8. Il y a donc 8 demi-mètres dans quatre mètres.

La division en tant que partage n'existe plus, selon l'auteur de cet article. On ne peut donc pas obtenir un problème comme le suivant où 4 mètres divisés par 0,5 égale 8 mètres.

Lorsque nous impliquons les entiers relatifs dans notre travail, il y a toujours une perte de sens. Si le problème est le suivant : 12 divisé par (-3) égale (-4). Est-il possible de partager 12 en (-3) parties ? Ou doit-on trouver combien de (-3) il y a dans 12 ? On représente souvent les nombres négatifs par des températures. Alors, est-ce qu'on peut dire que dans 12 degrés Celsius, il y a un certain nombre de (-3) degrés Celsius ? On peut toujours trouver le nombre de dettes de trois dollars (-3) qu'il y a dans 12 dollars, 12 $ divisés par (-3 $) égale (-4).

On peut maintenant essayer avec la soustraction répétée ou 12 $ - (-3) = 15 $, 15 $ - (-3) = 18 $.

Selon l'auteur de cet article, la séquence d'enseignement de la division a une disparition de sens : avec les entiers, diviser c'est partager ou mesurer; avec les fractions, c'est mesurer; et avec les relatifs, c'est former l'esprit.

Lorsqu'on présente la division sous forme de mesure ou de partage, les élèves peuvent se construire une image mentale puisque ça fait partie du quotidien.

CAMEF 5-8

Les fractions et les nombres décimaux

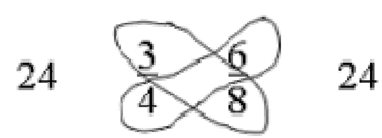
Voici l'avis de M. Lyons : « Malheureusement, ces images mentales nuisent à la compréhension de toutes les divisions qui ne sont pas des partages ou des mesures, comme cela se produit régulièrement avec les fractions, avec les nombres négatifs, avec les expressions algébriques et même avec les entiers positifs. Réussir à comprendre ces « divisions exceptionnelles » malgré l'enseignement reçu tient presque du miracle. »

Il est donc préférable de présenter la division aux élèves afin qu'ils puissent développer des images mentales qui, avec le temps, ne les feront pas bloquer lorsqu'ils vont aborder les fractions, les relatifs et l'algèbre.

Un bon exemple qui peut être satisfaisant est d'associer la division à un rectangle. Cela est facile à imaginer, comparativement à une mesure ou à un partage. M. Lyons dit que le rectangle est plus concret.

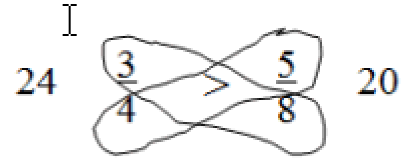
Référence: http://www.defimath.ca/mathadore/vol1num16.html

Petits 'trucs' : " More Fun with Fraction Strips"



Pour vérifier si deux fractions sont équivalentes, les élèves n'ont qu'à faire la multiplication croisée.

Cela peut également fonctionner pour les fractions qui ne sont pas équivalentes.



Ce qui peut être fait après est de placer les fractions en ordre décroissant. Les élèves peuvent placer le nombre entier au-dessus et le nombre fractionnaire en dessous. L'enseignant demande alors ce qu'ils remarquent. Les élèves devraient s'apercevoir d'une relation inverse entre la taille de la fraction et le dénominateur lorsque le numérateur est 1.

Les élèves diront peut-être que, lorsque les fractions diminuent, le dénominateur grandit et le numérateur reste constant.

Références : http://illuminations.nctm.org/print_lesson.aspx?id=541; http://mathforum.org/library/topics/fractions/

Les fractions et les nombres décimaux

Comment rendre les conceptions plus cohérentes : Multiplication des fractions

On peut parfois rencontrer dans nos salles de classe des élèves éprouvant certaines difficultés avec la multiplication des fractions. Sur le site de Math Forum, divers membres du service Teacher2Teacher ont donné leur truc sur comment faire lorsque les élèves rencontrent des obstacles. Voici donc 3 différentes méthodes des enseignants :

- On peut substituer le mot « fois » par le mot « de » et que cela a fait une grande différence pour ses élèves.Par exemple, ½ * 1/3 devient ½ de 1/3.

- On peut utiliser un exemple qu'une enseignante trouve bien fonctionner. Elle annonce à ses élèves que quelqu'un a reçoit un demi dollar l'heure pour faire une tâche. Si cette personne ne travaille qu'une demi-heure, combien d'argent va-t-elle recevoir? En général, les élèves savent que ceci donne 25 sous, donc le quart d'un dollar. Alors ½ * ½ = 1/4.

- On peut suggérer de construire un carré avec un nombre de tuiles dont les facteurs sont faciles à trouver comme par exemple, 12 par 12. On peut maintenant facilement trouver les fractions de longueurs des deux côté et la fraction de la surface délimitée par ces fractions, ce qui va donner le produit recherché (voir le jeu de multiplications dans notre modules des jeux).

Référence: http://www.homeedsa.com/Articles/Teaching%20Fractions.asp

Une nouvelle approche pour enseigner les fractions

Moss et Case (1999) ont déterminé 4 problèmes importants dans l'enseignement des fractions.

- Les enseignants mettent l'accent sur les procédures techniques.
- L'approche utilisée est centrée sur l'adulte plutôt que sur l'enfant et on oublie que les enfants ont déjà certaines connaissances.
- Les enseignants utilisent une représentation des nombres rationnels et entiers que les élèves confondent facilement. Par exemple, les élèves comptent le nombre de cases coloriées et ensuite le nombre total de cases, comme si chaque partie était une entité ou une quantité indépendante.
- Le dernier problème est dans l'utilisation de la notation qui peut être un obstacle au développement de la compréhension des élèves.

Les fractions et les nombres décimaux

Trois études ont été menées selon Moss et Case pour adopter une nouvelle approche en enseignement. La première était avec des blocs à base 10, la deuxième avec des feuilles de papier que les élèves ont pliées et en utilisant des situations de la vie réelle.

La dernière visait chacun des 4 problèmes ci-haut et incorporait diverses qualités des autres approches.

En utilisant des béchers et en les numérotant de 1 à 100 selon la quantité de leur contenu, les élèves ont réussi à trouver les niveaux appropriés en coupant de moitié et en composant (50+25 = 75). Les élèves ont développé la notion de nombres décimaux en raffinant leur approche.

Moss et Case ont trouvé 4 avantages à ces approches.

- Il y avait un plus grand accent sur le sens plutôt que sur les procédures.
- Il y avait un plus grand accent sur la nature proportionnelle des fractions.
- Il y avait un plus grand accent sur la façon naturelle dont les enfants vont résoudre les problèmes.
- Il y avait l'utilisation d'une forme alternative des représentations visuelles servant de médiatrices entre les quantités proportionnelles et les représentations numériques.

Référence: http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf

Commentaires didactiques

Lamon (1999) écrit : « Quand on passe dès nombres entiers aux fractions, la variété et la complexité de la situation qui donnent sens aux symboles augmentent beaucoup. Comprendre les nombres rationnels implique la coordination de plusieurs idées et interprétations différentes qui sont interliées. »

D'après les auteurs, les fractions devraient être introduites dès la deuxième année, puisque même ces enfants savent ce qu'est boire un demi-verre de jus d'orange. Il n'y a aucun problème à permettre aux enfants d'apprivoiser les fractions dans des situations intuitives.

Voici des éléments stratégiques de ce qui peut être ajouté dans les salles de classe quant à l'enseignement des fractions.

- Discuter en détail dès le début de l'enseignement des avantages et des désavantages de modèles discrets de fractions, tels que les tartes, pizzas et rectangles.

- Si les habiletés d'abstraction et de déduction sont bien développées, cela déterminera si les fractions vont aider ou être un obstacle à l'apprentissage de l'algèbre.
- Il faudrait inclure une section sur les fractions négatives pour compléter la discussion sur le système de nombres rationnels.
- Faire le lien entre les nombres décimaux et les fractions va élargir les conceptions de nombres rationnels.
- Il est également important de discuter du rôle des calculatrices, leurs avantages et leurs limites.
- Il serait bon d'avoir une discussion sur les ratios et les proportions et leurs utilisations dans la vie quotidienne.

Communication mathématique

Lorsque les élèves font des activités qui les aident à développer la compréhension de divers aspects des fractions, l'accent doit être mis sur le développement des habiletés à expliquer et à communiquer leur pensée.

Le rôle de l'enseignant est donc de faciliter et d'encourager la communication pour que la compréhension se développe plus facilement. Non seulement doit-il encourager les élèves à communiquer mathématiquement, mais aussi être un modèle de bonnes compétences en communication. Il faut pouvoir poser des questions qui provoquent, étendent et qui présentent des défis aux élèves quant à leur raisonnement mathématique.

L'enseignant résume souvent l'idée de l'élève pour s'assurer d'avoir bien compris ce que l'élève veut dire. Ensuite il pose des questions qui amènent l'élève à réfléchir sur le pourquoi de ses apprentissages.

Lorsque les élèves font une erreur, l'enseignant ne corrige pas les élèves, mais continue toujours d'écouter ce qu'ils disent. Il pose plutôt des questions pour mener les élèves à remettre en question ce qu'ils ont dit.

Référence : http://illuminations.nctm.org/reflections/3-5/fractions/

Développement de la pensée relationnelle

Quand les enfants apprennent les fractions, ils vont parfois prendre un morceau de papier et le plier en deux pour faire des demis, et à nouveau en deux pour faire des quarts. Mais lorsqu'ils doivent faire des tiers, cela n'est pas tout à fait évident. Qu'arrive-t-il s'il y a un petit morceau d'un des côtés qui dépasse et que l'enfant le coupe pour obtenir trois parties identiques ? Il obtient des tiers, mais des tiers de quoi ? Ce n'est plus le tiers du morceau avec lequel il a débuté puisqu'une partie de celui-ci a été coupée.

Une des grandes idées au cœur des fractions est de comprendre que le tiers est dans une relation partie/entier. Le tiers d'un morceau de papier n'est pas la même chose que le tiers d'un autre morceau de papier plus court. C'est cette pensée « relationnelle » qui cause des problèmes aux enfants. Les parties doivent être équivalentes, mais aussi équivalentes en relation avec le tout.

Les enfants comprennent-ils que lorsqu'ils comparent deux fractions, le numérateur est aussi important et encore plus, précisément si les dénominateurs sont communs? Dans ce cas, seuls les numérateurs sont importants. Si les numérateurs sont identiques? Seuls les dénominateurs sont alors importants.

Les différentes façons de représenter le même nombre rationnel amènent le concept d'équivalence, qui est souvent confondu avec l'égalité; ainsi le travail didactique est nécessaire pour développer le sens de l'équivalence dans des situations diverses telles que les suivantes.

- Quand les élèves utilisent la calculatrice pour savoir quelle décimale équivaut à la fraction, si le dénominateur est 10, la décimale aura le numérateur dans sa réponse. Par exemple, si la fraction est 3/10, la décimale est 0,3. Si la fraction est 6/10, la décimale est 0,6.
- Toutes les fractions qui sont équivalentes à ½ sont équivalentes à 0.5.
- Si on continue à ajouter des 0 au diviseur, la décimale change d'une place chaque fois. Par exemple, 123 divisé par 10 égale 12,3 et 123 divisé par 100 donne 1,23
- Lorsqu'on regarde le nombre par lequel on divise (dénominateur), la décimale qui correspond à la fraction aura le même nombre de chiffres après la virgule que le nombre de zéros dans le dénominateur. Par exemple, 1/10 = 0,1; 1/100 = 0,01; 1/1000 = 0,001; etc.

Pour que les enfants puissent mathématiser le monde autour d'eux, ils doivent pouvoir le faire à leur propre façon. Ils doivent s'approprier les grandes idées et progressivement raffiner leurs stratégies. Ils utiliseront peut-être les additions répétées, le doublement, les multiples, la table de ratio ou des ratios comme opérateurs. Leurs stratégies ne seront pas toujours efficaces ou suffisantes, tout dépendant d'où ils sont rendus dans leur apprentissage. Il y a toutefois une progression dans le développement de leurs stratégies qui doit être bien repérée par l'enseignant. Voici une stratégie utilisée par des enfants lorsque vient le temps d'additionner des nombres décimaux :

71,97 + 28,2 peut devenir 71,17 + 29 puisque 0,8 a été soustrait de 71,97 et additionné à 28,2; il y a donc un nombre décimal de moins.

Utiliser l'interchangeabilité entre les fractions et les nombres décimaux peut faciliter la compréhension chez certains élèves. Par exemple, 75 x 80 peut être semblable à ¾ x 80; il suffit de se rappeler de compenser la valeur décimale dans la réponse.

Les algorithmes imposés et appris mécaniquement freinent la capacité des élèves de construire une compréhension des propriétés distributives et associatives de la multiplication, ou sous-tendent la procédure algébrique.

Différents contextes réels dans lesquels les fractions sont utilisées peuvent être utiles pour développer le sens des nombres rationnels : temps, argent, distances, espaces, loteries (probabilités) et bien d'autres. Par exemple, on peut utiliser l'horloge pour faire référence aux dénominateurs tels que 2, 3, 4, 6, 12.

CAMEF 5-8

Les fractions et les nombres décimaux

Bibliographie

Even, R. et Tirosh, D. (2002). Teacher knowledge and understanding of students' mathematical learning. Dans *Handbook of International Research in Mathematics* (pp. 222-236), Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Jones, G., Landrall, C., Thornton, C. et Nisbet, S. (2002). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. Dans *Handbook of International Research in Mathematics* (pp. 123-124), Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Perry, B. et Dockett, S. (2002). Young children's access to powerful mathematical ideas. Dans *Handbook of International Research in Mathematics* (pp. 93-96), Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Thompson, P.W. et Saldanha, L.A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. Dans National Council of Teachers of Mathematics (Éds)., *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: NCTM.

Twomey, F. & Dolk, M. (2002). *Young Mathematicians at work : Constructing Fractions, Decimals, and Percents.* Portsmouth: Heinemann.